

The Rotation-Operator Gate: Reading the Operation Plane as Euler Rotations for Depthless Logic Composition

회전 연산자 게이트: 연산면을 오일러 회전으로 읽어 깊이 없이 논리를 합성한다

한혁진 (bokkamsun@gmail.com) · ORCID 0009-0007-4132-1707

반야 연구 시리즈 제7편 (제3편 바이토른의 확장)

본 문서 CC BY 4.0 · 코드 Apache-2.0

초록

본고는 제3편 [3]의 바이토른 게이트가 가진 표현 한계 2종에서 출발한다. 시그모이드 게이트는 치역이 0에서 1이라 통과와 차단만 표현하고 부정(부호 뒤집기)을 한 홑에 표현하지 못하며, 연산면 성분이 자기 채널만 조절하는 대각 작용이라 회전이 없다. 본고는 연산면을 오일러 회전각으로 읽는 회전 연산자 게이트를 제안한다. 근거는 분수 미분(fractional derivative, 미분 횟수를 실수로 일반화한 것)의 인수분해다. 주파수 영역에서 $(i\omega)^\alpha$ 는 진폭 $|\omega|^\alpha$ 와 오일러 회전 $e^{i\alpha\pi/2}$ 의 곱으로 갈라지고, 논리를 나르는 쪽은 회전이다. 회전 게이트에서 부정은 180도라는 기본 연산이 되고, 연산의 합성은 각도 덧셈이 되며, 노름이 보존되고, 수반(adjoint, 기울기를 정확히 거꾸로 되돌려 흘리는 짝 연산)은 켈레 회전 $R(-\theta)$ 라 닫힌형으로 나온다. 특히 각도 기울기가 들어온 신용과 회전 결과의 이차원 외적으로 닫혀 순전파 입력을 저장할 필요가 없다. 이 수반은 유한차분과의 대조에서 내적 항등 차이 0, 기울기 비율 중앙값 1.000000으로 검증했다. 측정은 깊이를 1블록으로 제한해 게이트만 변수로 남긴 깊이 배제 판별로 했다. 수 3종을 읽으며 누적 합의 mod 3 상태를 말하는 과제에서 길이 3 조합 27개 중 14개만 가르치고 13개를 숨기면(빈칸), 같은 1블록 엔진에서 게이트만 바꾼 절제 대조로 순위가 갈린다. 빈칸의 자기 되먹임 정확도는 회전 게이트와 tanh 게이트가 시드 3개 전부 100%, 시그모이드 게이트 90%, 연산면 차단 62%, 표준 트랜스포머 1층 49%(우연 33%)다. 안 본 길이 6에서는 회전 게이트가 평균 82%로 가장 높고 시드 1개는 100%에 이르며, 표준 1층은 우연으로 무너진다. 수렴도 회전 게이트가 평균 317스텝으로 가장 빠르고 시드 간 흔들림이 가장 작다. mod n 덧셈은 원을 n 등분한 이산 회전군과 동형이므로, 이 과제의 대수가 곧 회전이고, 실수 스칼라 게이트에는 위수 3 연산이 존재하지 않는다는 것이 이 판별이 편파적인 이유다. 본고는 이어서 같은 판별을 한 단 위로 확장한다. 쌍별 평면 회전은 합성이 각도 덧셈으로 닫히므로 가환(commutative, 순서를 바꿔도 결과가 같음)이고, 순서가 결과를 바꾸는 비가환(non-commutative) 연산은 이 게이트에 존재하지 않는다. 처방은 연산면 4성분을 단위 쿼터니언(quaternion, 4성분으로 회전을 나타내는 수 체계)으로 읽어 채널 4개 묶음을 좌곱으로 돌리는 쿼터니언 게이트다. 단위 쿼터니언의 좌곱은 겹치는 평면 2개를 동시에 돌리므로 합성이 비가환이고, 수반은 역시 켈레 좌곱과 복원 항으로 닫히는 무저장 닫힌형이다(내적 항등 차이 0, 기울기 비율 중앙값 1.000000). 판별 과제는 가장 작은 비가환 군인 정삼각형의 대칭으로 바꾼다. 이동(120도 회전, 240도 회전, 뒤집기)을 하나씩 읽으며 표시된 정삼각형의 상태 6종을 자리마다 말하는 과제다. 규칙 표 18항목을 전부 노출하고 길이 3 조합 27개 중 13개를 숨긴 합성시험(시드 6개)에서 쿼터니언 게이트는 빈칸 평균 97.5%로 가장 높고, 수렴이 평균 288스텝으로 가장 빠르고 시드 간 흔들림이 가장 작으며, 안 본 길이 4부터 6의 강제 점수가 시드 6개 내내 94에서 100%로 가장 균일하고, 자기 되먹임의 하락이 가장 완만하다. 기하 게이트 2종에 남는 실패는

전부 시작 상태의 규칙에 국소화되고, 모든 엔진 군의 빈칸 점수가 순서를 무시하는 풀이의 상계인 가한 천장 38%를 크게 넘는 것은 루프가 순서를 창의 중간 상태로 외부화하기 때문이다. 규칙 표를 일부 숨긴 유추시험에서는 본 규칙만으로 풀리는 빈칸의 몫 69%를 넘는 점수가 어느 군에서도 시드 전반에서 유지되지 않고, 회전과 쿼터니언 게이트는 시드 6개 전부 몫 아래로 내려가지도 않아, 배운 규칙의 합성과 배우지 않은 규칙의 유추가 서로 다른 능력임이 갈라져 측정된다. 가한 과제는 회전이면 충분하고, 비가환 과제에서는 겹친 면의 회전이 가장 빠르고 안정된 그릇이다. 과제의 대수가 게이트의 기본 연산을 정한다는 것이 판별 2종의 공통 결론이다. 소형 합성 과제라는 한계와 발행 모델 크기로의 학습이 남은 과제임을 명시한다.

측정

이 글의 모든 정량 수치는 집필 환경에서 측정한 값이다(환경은 부록 B). 학습과 측정 전체가 동봉 프로브 하나로 재생되며 별도 모델이나 말뭉치 내려받기가 필요 없다(부록 C). 직교 관점의 이론적 배경은 별도 공리 문헌 [1]에 있으며, 이 글의 주장은 그 공리에서 연역한 것이 아니라 측정에서 나온다.

목차

1. 서론	6
1.1 기여	7
2. 분수 미분과 오일러 회전	8
3. 회전 게이트의 정의와 수반	8
4. 쿼터니언 게이트의 정의와 수반	10
5. 측정 준비: 수반 정합과 설계 증명	11
6. 깊이 배제 판별: mod 3 과제	12
6.1 과제와 조건	12
6.2 결과	13
6.3 군 구조 검사와 도구의 한계	14
6.4 프로토콜 3종의 비교	14
7. 깊이 배제 판별: 삼각형 과제	15
7.1 과제와 분할 2종	15
7.2 결과	15
7.3 천장 부검	17
7.4 기본 연산 사다리	17
8. 한계와 다음 측정 과제	18
9. 결론	18
10. 후속 논문 예고	19
참고문헌	19
부록 A. 실험 설정	20
부록 B. 측정 환경	20
부록 C. 재현 안내	20

용어 범례

용어를 아래 표에 정의한다. 같은 개념에는 같은 이름만 사용하며, 일곱 편의 본문과 그림이 모두 이 표를 따른다. 코드 기준은 동봉 코드에서 그 개념을 구현한 식별자이고, 일반 용어는 학계에서 통용되는 가장 가까운 이름이다. 다를 때만 칸을 채웠다.

용어 범례 1. 엔진과 신용

용어	뜻	코드 기준	일반 용어
정확한 전치	각 연산의 수반을 손으로 유도해 닫힌형으로 구현한 역방향 계산. 이 엔진과 신용 사슬의 고유명	banya_core.py	수동 역전파
수반	순전파의 짝 연산. 기울기를 정확히 거꾸로 되돌려 흘린다	bwd 커널들	adjoint
신용	어떤 지점의 은닉에 대한 손실 기울기. 파라미터가 결과에 진 책임	델타(δ)	그레이디언트
신용 사슬	캐시를 역순으로 되짚으며 수반을 곱해 신용을 입력까지 되돌리는 골격	backward	오차역전파
수반 정합	수반 식이 유한차분과 같은 값을 내는지 확인하는 검사	각 편 프로브	gradient check
순환행렬 채널 혼합	채널 혼합을 순환행렬로 두고 rfft 성분곱으로 계산하는 연산		순환 합성곱
상대 거리 혼합	거리에만 의존하는 공유 계수로 자리들을 섞는 혼합	m_mat_w_lag	Toeplitz 혼합
시간혼합	다른 자리의 정보가 현재 자리로 섞여 드는 경로의 총칭		토큰 혼합
혼합 헤드	혼합을 병렬로 나누는 머리 수		어텐션 헤드
필터 사다리	넓은 필터 몇 개부터 좁은 필터 여러 개까지 스케일이 깊이를 따라 변하는 콘볼루션 채널 변환	m_mat_w_filter	콘볼루션 필터뱅크
창	모델이 한 번에 보는 토큰 자리들. 측정 단위로는 고정 길이 텍스트 조각	T	컨텍스트 윈도우
프로브	논문 수치를 목표값과 함께 재생하는 검증 스크립트	probe 폴더	재현 스크립트
얼린 모델	학습을 멈춰 고정한 발달 단계 모델	model 폴더 npz	frozen checkpoint
홀드아웃	학습에 쓰지 않은 평가 텍스트		held-out set

용어 범례 2. 바이토큰과 게이트

용어	뜻	코드 기준	일반 용어
바이토큰	토큰 하나를 데이터면과 연산면의 직교 쌍으로 두는 구조	USE_BITOKEN	
데이터면	토큰의 내용을 담는 임베딩 면. 더하기 자리로 들어간다	m_mat_w_data_axis	토큰 임베딩
연산면	토큰의 연산 지시를 담는 임베딩 면. 곱하기 자리로만 들어간다	m_mat_w_operate_axis	
더하기 자리, 곱하기 자리	데이터면이 실리는 잔차 덧셈 위치와 연산면이 작용하는 게이트 곱셈 위치		잔차 연결, 게이팅
게이트	각 채널의 통과량을 0에서 1로 정하는 밸브. 직전 토큰의 연산면이 주입된다	m_mat_w_gate	게이팅
한 칸 이동	직전 토큰의 연산면이 다음 자리의 게이트로 주입되는 한 자리 밀림		
연산이 곧 가중치	연산면 임베딩이 라벨 없이 가중치 역할로 창발하는 현상		
일관 연산자	어떤 데이터에도 일관된 방향으로 작용하는 연산자		
방향 일관성	같은 연산이 여러 데이터를 꺾는 방향들의 평균 코사인. 연산자 창발의 지표	p_direction_consistency	
회전 연산자 게이트	연산면을 오일러 회전각으로 읽는 게이트. 본문 축약은 회전 게이트	paper7_rotation.py	
쿼터니언 게이트	연산면 4성분을 단위 쿼터니언으로 읽어 채널 4개 묶음을 좌곱으로 돌리는 게이트	install_quaternion	
기본 연산	게이트가 한 홑 지시로 곧바로 표현할 수 있는 연산		프리미티브
기본 연산 사다리	회전, 쿼터니언, 그 위 클리퍼드 대수로 이어지는 게이트 기본 연산의 확장 계열		
깊이 배제 판별	깊이를 1블록으로 제한해 게이트만 변수로 남긴 의도된 편파 측정	제7편 프로브	
규칙 표	상태와 이동의 쌍마다 다음 상태를 정하는 표. mod 3 과제는 9항목, 삼각형 과제는 18항목		전이 표
삼각형 과제	이동 3종을 읽으며 표시된 정삼각형의 상태 6종을 자리마다 말하는 비가환 판별 과제	제7편 프로브	
유추시험	규칙 표 일부를 노출하지 않는 무작위 분할 판별. 배우지 않은 규칙의 유추를 측정한다		
합성시험	규칙 표 전체를 노출하는 커버리지 보장 분할 판별. 배운 규칙의 순수 합성을 측정한다		
가환 천장	순서를 무시하는 풀이가 빈칸에서 닿을 수 있는 정확도 상계		
자기 되먹임	자기 출력을 입력으로 되먹이며 끝 상태를 채점하는 채점 방식		자기회귀 롤아웃

용어 범례 3. 되새김과 발달

용어	뜻	코드 기준	일반 용어
되새김	기울기 없이 임베딩을 이웃끼리 당겨 뭉치게 하는 자기조직화 학습	제2편 프로브	자기조직화
동종군	씨앗에서 코사인 최근접 이웃을 모은 뜻 가까운 개념 집합		클러스터
무게중심 당김, 감쇠	평균 쪽으로 당기고 원본 쪽으로 되돌리는 되새김의 두 힘. 균형에서 평형이 창발한다	ALPHA, 감쇠율	
월드먼저	언어 이전에 감각, 공간, 논리 축을 먼저 발달시키는 커리큘럼 순서	banya_world_data	커리큘럼 학습
발달 단계	스텝 수로 정의하고 사람 성장 이름을 붙인 체크포인트 단계		
축	임베딩 안에 방향으로 형성되는 성질의 눈금. 감각, 순서, 범주		표현 축

용어 범례 4. 어휘와 메타인지

용어	뜻	코드 기준	일반 용어
음절 원자 묶음	어휘 바닥층의 음절 단위 토큰 음절 원자를 묶어 사전에 올린 개념 토큰. 어휘 단위로만 사용한다	AtomTokenizer	문자 단위 토큰 서브워드
캐시 사전 토큰화	원자 아래층에 묶음 사전 위층을 얹은 2층 어휘 체계	제5편 프로브	서브워드 토큰화와 대비
확실, 모호, 모름 라우팅	자기 출력 분포로 갈리는 세 앞 상태 상태에 따라 답의 처리 경로를 배정하는 것	pmax, 엔트로피	불확실성 추정 routing
재해석	모호 히든을 문맥과 함께 재순전파해 확실히 끌어 올리는 절차	제6편 프로브	
유사도 정리	데이터면 유사도로 개념이 정돈되는 축		
추론 순회	연산면을 따라 추론을 이어 가는 축		
자기 발화	유사도 정리와 추론 순회를 엮어 스스로 말을 잇는 목표 상태		
반야프레임	시리즈의 배경을 이루는 공리 15개 체계. 본문 주장의 근거는 아님		

기호 범례

이 편의 수식과 본문이 함께 사용하는 기호를 정의한다. 한 식 안에서만 쓰는 국소 기호는 각 식 아래의 기호 줄에 적었다.

기호	한글 명칭	정의 및 의미	자료형
ω	주파수	주파수 영역의 주파수 변수. 미분 한 번은 성분마다 $i\omega$ 를 곱한다	스칼라
α	미분 차수	미분 횟수를 실수로 일반화한 분수 미분의 차수	스칼라
i	허수 단위	i 자체가 $e^{i\pi/2}$ 곧 90도 회전이라 미분 두 번이 부정이 된다	스칼라
n	법	$\text{mod } n$ 덧셈의 법이자 원의 등분 수. 위수 n 순환은 $360/n$ 도로 표현된다	정수
σ	시그모이드	제3편 밸브 게이트의 함수. 치역이 0에서 1이라 통과와 차단만 표현한다	함수
o_{t-1} $R(\theta)$	직전 토큰의 연산면 회전 연산자	회전 게이트에서 짝수 성분이 회전각 θ_k 가 된다 채널 쌍마다 각도만큼 돌린다. 노름을 보존하고 수반은 켈레 회전 $R(-\theta)$ 이다	벡터 연산자
θ	회전각	연산면을 읽어 얻는 회전각의 모음. 연산면이 0이면 항 등이다	벡터
θ_k	k 번째 쌍의 회전각	직전 토큰 연산면의 $2k$ 번째 성분에서 읽는다	스칼라
x_f	잔차 스트림	현재 자리의 잔차 스트림, 데이터면 더하기 자리	벡터
x_m	시간혼합 문맥	시간혼합이 모아온 문맥, 게이트가 회전을 걸어 잔차에 더하는 대상	벡터
h	게이트 출력	게이트 순전파 출력, 회전 게이트에서 $h = x_f + R(\theta)x_m$	벡터
δ^h	출력 쪽 손실	출력 h 에 대한 손실 기울기, 수반 계산의 입력	벡터
M_0, M_1, M_2	수 토큰	$\text{mod } 3$ 과제에서 하나씩 읽는 수 토큰, 값은 각각 0, 1, 2	정수
S_0, S_1, S_2	상태 토큰	지금까지 합의 $\text{mod } 3$ 나머지 0, 1, 2를 나타내는 답 칸	정수
a	연산면 묶음	직전 토큰 연산면의 4성분 묶음. 쿼터니언 게이트의 입력이다	벡터
u	오프셋 합	$(1 + a_0, a_1, a_2, a_3)$. 노름으로 나누면 q 가 된다	벡터
q	단위 쿼터니언	연산면 묶음에서 읽는 회전자. 연산면이 0이면 항등이다	쿼터니언
$\bar{q}$	켈레 쿼터니언	벡터 부분 3성분의 부호를 뒤집은 쿼터니언. 단위 쿼터니언의 역원이다	쿼터니언
$\otimes$	쿼터니언 곱	쿼터니언 2개의 곱. 순서를 바꾸면 결과가 달라진다	연산자
v	채널 묶음	시간혼합 문맥 x_m 의 채널 4개 묶음. q 가 좌곱으로 돌리는 대상	벡터
R, R^2, F	이동 토큰	삼각형 과제의 이동 3종. 120도 회전, 240도 회전, 뒤집기	정수
P_0 부터 P_5	상태 토큰	표시된 정삼각형의 상태 6종을 나타내는 답 칸	정수
$\text{Cl}(n)$	클리퍼드 대수	방향 n 개의 기하 곱으로 만드는 대수. 후속 예고에서 사다리의 단을 가리킨다	대수

1. 서론

제3편 [3]은 토큰을 데이터면(더하기 자리)과 연산면(곱셈 게이트 자리)의 직교 쌍으로 두면 연산면이 라벨 없이 일관 연산자로 창발함을 측정했다. 그런데 그 게이트를 측정으로 뜯어보면 표현의 한계가 2 곳에서 드러난다. 첫째, 시그모이드의 치역이 0에서 1이라 밸브는 열거나 닫기만 할 뿐 뒤집지 못한다. 부정이라는 가장 기본적인 논리 연산이 한 홑짜리 지시로 존재하지 않는 것이다. 둘째, 연산면 성분이 각자 자기 채널의 밸브만 조절하는 대각 작용이라, 성분들 사이를 연결하는 회전이 없다.

본고는 이 한계 2종을 하나의 처방으로 푼다. 연산면을 밸브 개방도가 아니라 회전각으로 읽는 것이다.

채널을 2개씩 짝지어 각 쌍을 연산면이 주는 각도만큼 돌리면, 부정은 180도로, 연산의 합성은 각도 덧셈으로, 위수(order, 몇 번 반복하면 제자리로 돌아오는가) 임의의 순환 연산은 $360/n$ 도로 표현된다. 그리고 이 기본 연산은 제1편 [2]의 규율을 그대로 따른다. 회전의 전치는 켄레 회전이라 수반이 닫힌형으로 나오고, 유한차분 대조로 검증된다.

회전으로 한 단을 오르면 다음 질문이 바로 나온다. 쌍별 평면 회전의 합성은 각도 덧셈이라 가환(commutative, 순서를 바꿔도 결과가 같음)이다. 그런데 논리 합성이 전부 가환인 것은 아니다. 표시된 정삼각형을 뒤집은 뒤 돌리는 것과 돌린 뒤 뒤집는 것은 끝 상태가 다르다. 이런 비가환(non-commutative) 합성은 각도 덧셈에 존재하지 않으므로, 회전 게이트를 시그모이드 게이트에서 가른 것과 똑같은 형태의 대수 논증이 회전 게이트 자신에게 되돌아온다. 본고는 연산면 4성분을 단위 쿼터니언으로 읽는 쿼터니언 게이트를 다음 단으로 정의하고(4절), 가장 작은 비가환 군인 정삼각형의 대칭 과제로 같은 깊이 배제 판별을 반복한다(7절). 이 확장의 범위는 선행 공리 문헌 [1]이 첫 공리에서 자연의 기본 자료형이 비가환임을 명시한 데에 맞춰 잡았다. 다만 시리즈의 규약대로 공리는 배경 인용일 뿐이고, 본고 주장의 근거는 전부 측정이다.

측정은 깊이 배제 판별로 한다. 이 설계가 편파적임은 숨기지 않는다. 편파가 곧 가설이기 때문이다. 표준 세계에서 논리 합성은 깊이가 담당하므로, 모든 실험군에서 깊이를 1블록으로 제한하면 논리를 담을 자리는 게이트뿐이다. 같은 엔진에서 게이트만 바꾼 절제 대조가 그 자리의 표현능력 순위를 드러낸다.

1.1 기여

- 회전 연산자 게이트 : 연산면을 오일러 회전각으로 읽는 게이트를 정의한다. 부정과 순환 연산이 기본 연산이 되고 노름이 보존된다(3절).
- 쿼터니언 게이트 : 연산면 4성분을 단위 쿼터니언으로 읽어 채널 4개 묶음을 좌곱으로 돌리는 게이트를 정의한다. 비가환 합성이 기본 연산이 되고 노름이 보존된다(4절).
- 무저장 닫힌형 수반 : 게이트 2종의 수반을 유도한다. 전치는 켄레 회전과 켄레 좌곱이고, 연산면 기울기는 회전 결과를 출력에서 복원해 닫히므로 순전파 입력 저장이 필요 없다. 유한차분으로 검증한다(3절, 4절, 5절).
- 엔진 무수정 주입 : 발행된 엔진 파일을 한 줄도 바꾸지 않고 실행 중 커널 교체로 새 기본 연산을 붙이는 방식을 보이고, 그 교체가 계산을 바꾸지 않음을 궤적 일치로 증명한다(5절).
- 깊이 배제 판별 측정 : 깊이를 $\text{mod } 3$ 과제에서 게이트만 바꾼 절제 대조로 표현능력 순위(회전, tanh, 시그모이드, 차단, 표준 1층)를 측정한다(6절).
- 삼각형 판별과 분할 2종 : 정삼각형 대칭 과제에서 규칙 표의 노출을 통제된 분할 2종(유추시험, 합성시험)으로, 배운 규칙의 합성 능력과 배우지 않은 규칙의 유추 능력을 갈라 측정한다(7절).
- 위수 논증과 기본 연산 사다리 : 실수 스칼라 게이트에는 위수 3 연산이 존재하지 않고 회전에는 존재한다는 대수적 이유로 판별의 편파를 설명하며(2절, 6절), 같은 논증을 한 단 올려 가환 회전에는 비가환 합성이 존재하지 않음을 삼각형 판별로 측정한다. 과제의 대수가 게이트의 기본 연산을 정한다(7절).

2. 분수 미분과 오일러 회전

주파수 영역에서 한 번의 미분은 성분마다 $i\omega$ 를 곱하는 일이다. 미분 횟수를 실수 α 로 일반화한 분수 미분은 $(i\omega)^\alpha$ 를 곱하며, 이것은 인자 2개로 정확히 갈라진다.

식 2-1. 분수 미분의 인수분해

$$(i\omega)^\alpha = |\omega|^\alpha \times e^{i\alpha\pi/2}$$

기호: ω 는 주파수, α 는 미분 차수, $|\omega|^\alpha$ 는 진폭 인자, $e^{i\alpha\pi/2}$ 는 위상 회전 인자이다.

작동 방식: i 자체가 $e^{i\pi/2}$, 곧 90도 회전이다. 미분 한 번은 90도, 두 번은 180도가 되어 부정과 같다. $\sin$ 이 미분 두 번에 $-\sin$ 이 되는 것이 그 실체다. 진폭 인자는 고주파를 증폭시켜 반복 합성에서 폭주 위험이 있으므로 버리고, 논리를 나르는 회전 인자만 게이트로 사용한다. 순수 회전은 유니터리(unitary, 길이를 보존하는 변환)라 폭주도 소실도 없다.

그림 2-1. 분수 미분의 인수분해와 이산 회전

$$(i\omega)^\alpha = |\omega|^\alpha \times e^{i\alpha\pi/2}$$

진폭
 $|\omega|^\alpha$ 크기 증폭, 폭주 위험
 버린다

오일러 회전
 $e^{i\alpha\pi/2}$ 위상, 논리를 나름
 게이트로 쓴다

$i = e^{i\pi/2} = 90^\circ$. 미분 두 번 = 180도 = 부정: $\sin \rightarrow \cos \rightarrow -\sin$

mod n 덧셈은 원을 n 등분한 이산 회전군과 동형이다. mod 2 = 부호, mod 3 = 120도

분수 미분은 진폭과 오일러 회전의 곱으로 갈라지고, 논리를 나르는 쪽은 회전이다. i 가 90도이므로 미분 두 번이 부정이다. mod n 덧셈은 원을 n 등분한 이산 회전군과 동형이라, 6절 과제의 대수가 곧 회전이다.

한 가지 대수 사실이 6절 실험의 설계 근거가 된다. mod n 덧셈은 원 위에 n 등분 눈금을 찍은 이산 회전군과 동형이다. mod 2는 0도와 180도, 곧 부호이고, mod 3은 0도, 120도, 240도이다. 실수 스칼라의 세계에는 세 번 곱해 제자리로 돌아오되 한 번은 제자리가 아닌 연산이 존재하지 않는다($g^3 = 1$ 인 실수 해는 $g = 1$ 뿐). 위수 2인 부정까지는 부호 있는 스칼라(tanh)가 흉내 내지만, 위수 3부터는 회전만이 기본 연산으로 가진다.

이 논증에는 다음 단이 있다. 평면 회전의 합성은 각도 덧셈이라 가환이고, 각도 덧셈의 세계에는 순서가 결과를 바꾸는 합성이 존재하지 않는다. 시그모이드에 위수 3이 없다는 논증과 같은 형태로, 평면 회전에는 비가환이 없다. 4절의 쿼터니언 게이트가 그 단이다.

3. 회전 게이트의 정의와 수반

제3편의 게이트는 $h = x_f + \sigma(W_g x_f + b_g + o_{t-1})x_m$ 으로, 직전 토큰의 연산면 o_{t-1} 이 시그모이드 안에서 밸브를 조절한다. 본고의 회전 게이트는 밸브를 회전으로 바꾼다. 채널 $2k$ 와 $2k+1$ 을 한 쌍으로

묶고, 연산면의 짝수 성분을 그 쌍의 회전각 θ_k 로 읽는다.

식 3-1. 회전 게이트의 순전파

$$h = x_f + R(\theta) x_m, \quad R(\theta_k) \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_k u_k - \sin \theta_k v_k \\ \sin \theta_k u_k + \cos \theta_k v_k \end{pmatrix}$$

기호: x_f 는 현재 자리의 잔차 스트림, x_m 은 시간혼합이 모아온 문맥, (u_k, v_k) 는 x_m 의 k 번째 채널 쌍, θ_k 는 직전 토큰 연산면의 $2k$ 번째 성분이다.

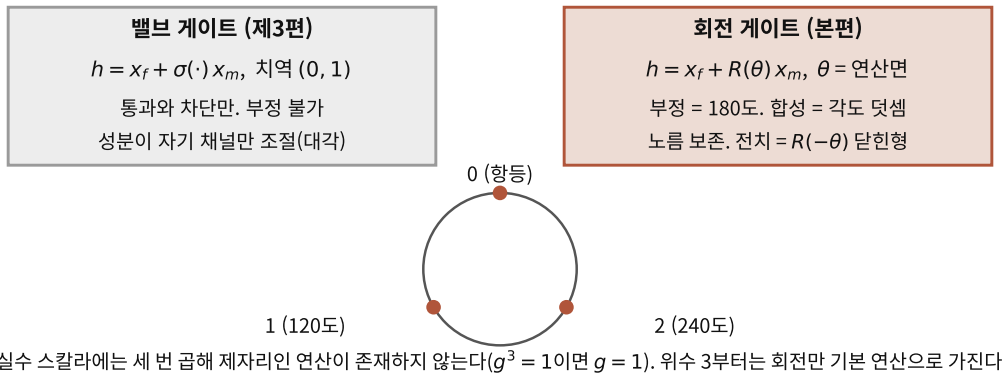
식 3-2. 회전 게이트의 수반

$$\delta x_m = R(-\theta) \delta^h, \quad \delta \theta_k = -\delta_{u_k}^h r_{v_k} + \delta_{v_k}^h r_{u_k}, \quad \delta x_f = \delta^h$$

기호: δ^h 는 출력 쪽 신용, $(r_{u_k}, r_{v_k}) = R(\theta_k)(u_k, v_k)$ 는 회전 결과, $\delta \theta_k$ 는 각도 기울기이다.

작동 방식: 회전의 전치는 같은 각도의 반대 방향 회전이다. 각도 기울기는 신용과 회전 결과의 이차원 외적인데, 회전 결과는 출력에서 $h - x_f$ 로 복원되므로 순전파 입력을 저장할 필요가 없다. 저장 없는 수반이다. 연산면이 0이면 $\theta = 0$ 이라 회전은 항등이고, 이는 제3편의 항등 출발(연산면이 0에서 시작해 출발한다)과 같은 규약이다.

그림 3-1. 밸브 게이트와 회전 게이트



밸브 게이트는 통과와 차단만 표현하고 성분이 자기 채널만 조절한다. 회전 게이트는 부정이 180도라는 기본 연산이 되고 합성이 각도 덧셈이 되며 노름이 보존된다. 아래 원은 mod 3의 눈금 3개다. 실수 스칼라에는 위수 3 연산이 존재하지 않으므로, 이 대수부터는 회전만 기본 연산으로 가진다.

구현은 발행된 엔진 파일을 한 줄도 바꾸지 않는다. 게이트 커널 3개(순전파, 역방향, 무게 기울기)를 실행 중에 모듈 속성 교체로 바꿔 끼우는 주입 방식이며, 주입이 계산을 바꾸지 않음은 5절에서 원본 커널의 파이썬 재구현으로 궤적 일치를 보여 증명한바 있다. 회전 게이트에는 밸브 손잡이(w_g)와 치우침(b_g)이 없고, 회전은 연산면만이 이끈다.

4. 쿼터니언 게이트의 정의와 수반

회전 게이트의 쌍별 회전은 채널 쌍마다 저마다의 평면 하나를 돌린다. 서로 다른 쌍은 애초에 겹치지 않고, 같은 쌍 안에서는 합성이 각도 덧셈이므로, 어느 쪽이든 순서를 바꿔도 결과가 같다. 비가환 합성을 기본 연산으로 가지려면 연이은 회전 2개가 같은 채널을 서로 다른 평면에서 공유해야 한다. 가장 작은 확장이 쿼터니언이다. 쿼터니언은 성분 4개로 회전을 나타내는 수 체계로, 곱셈이 순서에 민감하다는 것이 정의 자체에 들어 있다.

쿼터니언 게이트는 채널을 4개씩 묶는다. 직전 토큰 연산면의 4성분 묶음 a 에 항등 오프셋을 더해 u 로 만들고, 노름으로 나눠 단위 쿼터니언 q 를 얻은 뒤, 시간혼합 문맥의 채널 묶음 v 를 q 로 좌곱한다.

식 4-1. 쿼터니언 게이트의 순전파

$$h = x_f + q \otimes v, \quad q = \frac{u}{\|u\|}, \quad u = (1 + a_0, a_1, a_2, a_3)$$

기호: a 는 직전 토큰 연산면의 4성분 묶음, v 는 시간혼합 문맥 x_m 의 채널 4개 묶음, $\otimes$ 는 쿼터니언 곱이다. 채널 64는 묶음 16개로 나뉘고 묶음마다 이 식이 독립으로 작용한다.

작동 방식: 연산면이 0이면 $u = (1, 0, 0, 0)$ 이라 q 는 항등이고, 이는 회전 게이트와 같은 항등 출발 규약이다. 단위 쿼터니언의 좌곱은 노름을 보존하므로 폭주도 소실도 없다. 그리고 좌곱은 묶음의 채널 4개가 공유하는 겹치는 평면 2개를 같은 각도로 동시에 돌리므로, 연이은 좌곱 2개는 순서를 바꾸면 결과가 달라진다. 회전 게이트가 표현하지 못하는 비가환 합성이 이 게이트에서는 곱셈 규칙 그 자체다.

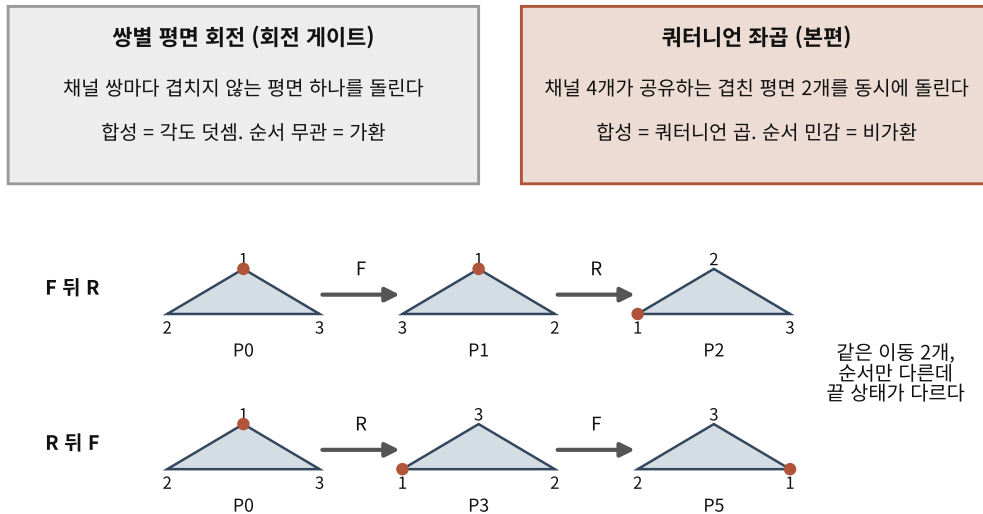
식 4-2. 쿼터니언 게이트의 수반

$$\delta^v = \bar{q} \otimes \delta^h, \quad \delta^q = \delta^h \otimes \bar{r} \otimes q, \quad \delta^u = \frac{\delta^q - q(q \cdot \delta^q)}{\|u\|}, \quad \delta^{x_f} = \delta^h$$

기호: $\bar{q}$ 는 켤레 쿼터니언, $r = q \otimes v$ 는 좌곱 결과, $q \cdot \delta^q$ 는 4성분의 내적, δ^u 는 정규화를 거슬러 연산면 묶음으로 돌아가는 기울기이다.

작동 방식: 단위 쿼터니언 좌곱의 전치는 켤레 좌곱이다. 쿼터니언 기울기 δ^q 에 필요한 v 의 켤레는 $\bar{v} = \bar{r} \otimes q$ 로 좌곱 결과에서 되계산되고, 좌곱 결과는 출력에서 $r = h - x_f$ 로 복원되므로, 회전 게이트와 마찬가지로 순전파 입력을 저장할 필요가 없다. 마지막 항은 정규화의 역방향으로, 기울기에서 q 방향 성분을 빼서 노름으로 나눈다. 쿼터니언 게이트에도 밸브 손잡이와 치우침이 없고, 회전은 연산면만이 이끈다. 구현은 3절과 같은 커널 주입이라 발행 엔진 파일은 여전히 한 줄도 바뀌지 않는다.

그림 4-1. 쌍별 평면 회전과 쿼터니언 좌곱



왼쪽의 쌍별 평면 회전은 채널 쌍마다 겹치지 않는 평면 하나를 돌리므로 합성이 각도 덧셈이고 가환이다. 오른쪽의 쿼터니언 좌곱은 묶음의 채널 4개가 공유하는 겹치는 평면 2개를 동시에 돌리므로 합성 순서가 결과를 바꾼다. 아래는 삼각형 과제의 이동 2개를 순서만 바꿔 적용한 것으로, 끝 상태가 달라진다.

5. 측정 준비: 수반 정합과 설계 증명

측정

새 기본 연산은 검사 2종을 통과한 뒤에만 실험에 들어간다.

- 회전 게이트 수반 정합 : 식 3-2의 전치를 내적 항등 $\langle \delta, R(\theta)x \rangle = \langle R(-\theta)\delta, x \rangle$ 로 검사한 차이가 0.00e+00(float64에서 정확히 0)이고, 스칼라 손실의 혼합 기울기와 각도 기울기를 중심 유한차분과 대조한 비율 중앙값이 둘 다 1.000000 이다.
- 쿼터니언 게이트 수반 정합 : 식 4-2의 전치를 내적 항등 $\langle \delta, q \otimes v \rangle = \langle \bar{q} \otimes \delta, v \rangle$ 로 검사한 차이가 0.00e+00이고, 혼합 기울기와 무저장 경로의 연산면 기울기(좌곱 결과를 $h - x_f$ 로 복원)를 중심 유한차분과 대조한 비율 중앙값이 둘 다 1.000000이다. 같은 검사에서 좌곱 2개의 순서를 바꾼 차이의 노름 평균은 1.912로, 쌍별 평면 회전이면 0이 되는 값이다. 이 게이트가 비가환 합성을 실제로 가진다는 측정이다.
- 설계 증명 : 원본 시그모이드 커널의 파이썬 재구현을 주입해 시드 0으로 2,000스텝을 나란히 학습하면, 5개 지점의 교차엔트로피 궤적(0.1141, 0.0048, 0.0002, 0.0001, 0.0000)이 표시 자리에서 동일하고 최대 차이가 10의 -7승 아래의 float32 잡음 수준이다(이 바닥값 자체는 실행마다 GPU 합산 순서로 흔들린다). 커널 주입이라는 설계 자체는 계산을 바꾸지 않는다. 회전 게이트와 쿼터니언 게이트는 전부 이 주입 하나로 들어간다.

재현

이 글의 수반 정합, 설계 증명, 6절과 7절의 판별 측정 전체는 부록 C의 준비를 마친 뒤 다음 한 줄로 재생된다.

```
cd probe && python3 paper7_rotation_probe.py
```

6. 깊이 배제 판별: mod 3 과제

6.1 과제와 조건

과제는 수 3종(M_0, M_1, M_2)을 하나씩 읽으며 지금까지 합의 mod 3 상태(S_0, S_1, S_2)를 자리마다 말하는 것이다. 과제가 사용하는 토큰은 7종이다. 빈 자리를 채우는 pad 하나, 수 토큰 M_0, M_1, M_2 (값은 각각 0, 1, 2), 상태 토큰 S_0, S_1, S_2 (지금까지 합을 3으로 나눈 나머지 0, 1, 2)다. 길이는 한 문제에서 연달아 읽는 수의 개수다. 문제 하나는 창 16칸의 왼쪽을 pad로 채운 뒤 수와 상태를 번갈아 놓아 만든다. 수 하나를 읽을 때마다 바로 다음 칸이 그 시점의 상태를 적는 자리다. 모델의 일은 그 상태 칸을 맞추는 것뿐이고, 수 칸과 pad는 채점하지 않는다.

보기. 길이 3 문제 $M_1 M_2 M_0$ 의 창은 pad 10칸 뒤에 $M_1 S_1 M_2 S_0 M_0 S_0$ 이다. M_1 을 읽으면 합이 1이라 S_1 , M_2 를 읽으면 합이 3이라 나머지 0으로 S_0 , M_0 을 읽으면 합이 3 그대로라 다시 S_0 이다. 규칙은 하나다. 수 하나를 읽을 때마다 상태가 그 수만큼 앞으로 돈다.

학습은 길이 2 조합 9개 전부와 길이 3 조합 27개 중 고정 시드로 뽑은 14개, 합쳐 23문제만 사용한다. 길이 3의 나머지 13개는 숨긴다. 채점은 3칸이다. 본 것은 학습한 23문제다. 빈칸은 학습에서 숨긴 같은 길이 3의 13개로, 27개짜리 표를 통째로 외운 풀이를 잡아내는 칸이다. 안 본 길이는 길이 4(81개), 5(243개), 6(729개) 전량이다. 학습에 이 길이의 문제가 하나도 없었으므로, 표가 아니라 규칙 자체를 잡은 모델만 긴 문제로 이어 쓸 수 있다.

채점 방식은 2종이다. 강제는 창에 정답 상태를 그대로 둔 채 각 상태 칸의 예측을 채점한다. 앞 스텝이 틀려도 뒤 스텝은 정답에서 다시 출발하므로 스텝당 규칙 하나만 분리해 측정한다. 자기 되먹임(줄여서 자기)은 상태 칸을 전부 비운 뒤 모델이 예측한 첫 상태를 창에 적어 넣고, 그 창으로 다음 상태를 예측하는 식으로 자기 출력을 되먹여 마지막 상태를 채점한다. 앞 스텝의 오류가 뒤 스텝의 입력이 되어 누적되는 실제 루프라 이쪽이 정직한 점수다.

실험군 5종은 다음과 같다. A(시그모이드 게이트, 연산면 켜), B(연산면 차단), D(tanh 게이트), E(회전 게이트)는 전부 같은 반야 1블록 엔진(채널 64, 혼합 헤드 4, 필터 사다리 동일)에서 게이트만 바꾼 절제 대조다. C는 같은 폭의 표준 트랜스포머 [4] 1층이다. 모든 군이 시드 3개(0, 1, 2)로 12,000스텝을 학습한다. 상태를 쓰면서 가는 이 프로토콜에서 연쇄는 루프가 담당하므로, 스텝당 남는 것은 순환 연산 한 번이고, 그 한 번을 누가 기본 연산으로 가졌는지가 갈린다.

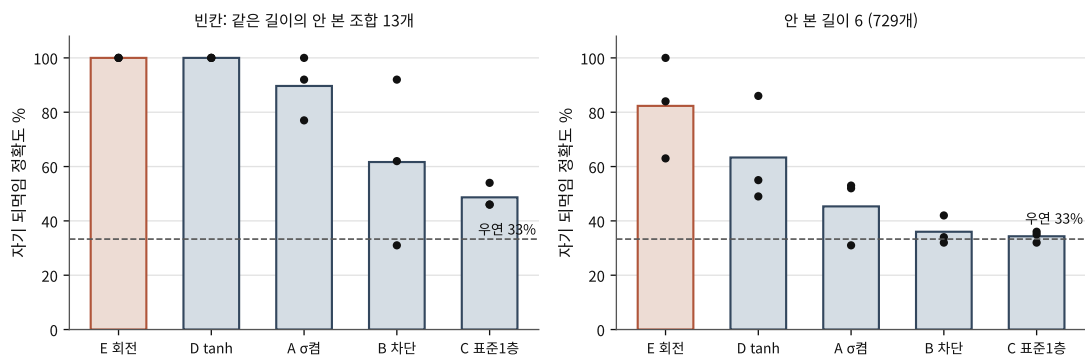
6.2 결과

측정

자기 되먹임 기준의 측정이다(시드 3개 각각, 괄호는 평균).

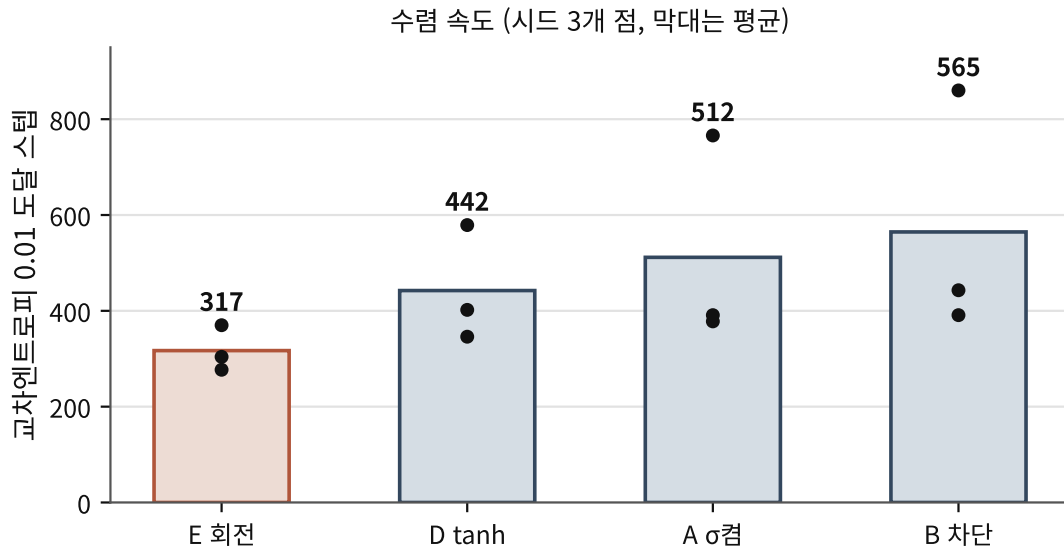
- 빈칸(같은 길이 3의 13개) : E 회전 100, 100, 100(100.0) · D tanh 100, 100, 100(100.0) · A 시그모이드 77, 100, 92(89.7) · B 차단 31, 62, 92(61.7) · C 표준 1층 46, 54, 46(48.7). 우연은 33.3%다.
- 안 본 길이 6(729개) : E 84, 63, 100(82.3) · D 86, 49, 55(63.3) · A 53, 52, 31(45.3) · B 34, 42, 32(36.0) · C 35, 36, 32(34.3).
- 수렴(교차엔트로피 0.01 도달 스텝) : E 370, 304, 277(평균 317) · D 579, 346, 402(442) · A 766, 378, 391(512) · B 860, 443, 391(565). E가 가장 빠르고 시드 간 흔들림이 가장 작다.
- 본 것 : 5군 모두 강제와 자기 100%. 갈림은 암기가 아니라 빈칸과 길이에서 발생한다.

그림 6-1. mod 3 판별 결과



왼쪽은 같은 길이의 빈칸 13개, 오른쪽은 안 본 길이 6이다. 막대는 시드 3개 평균이고 점이 각 시드다. 순위는 회전, tanh, 시그모이드, 차단, 표준 1층 순서로, 게이트에 담긴 연산의 표현능력을 그대로 따른다. 표준 1층은 본 것만 100%이고 빈칸부터 우연 부근이다.

그림 6-2. mod 3 수렴 속도



교차엔트로피 0.01 도달 스텝이다. 막대는 시드 3개 평균이고 점 하나가 시드 하나의 값이다. 옳은 기본 연산을 가진 쪽이 덜 헤맨다. 회전 게이트가 평균 317스텝으로 가장 빠르고 시드 간 편차도 가장 작다.

읽는 법은 위수 논증 그대로다. 이 과제의 스텝당 연산은 위수 3의 순환이다. 회전 게이트는 그 연산을 기본 연산으로 가지므로 빈칸을 시드 3개 전부 채우고 안 본 길이에서도 가장 높다. tanh는 부호(위수 2)까지만 기본 연산이라 빈칸은 채워진 길이에서 흔들리고, 시그모이드는 부호조차 없어 우회 표현에 의존하며, 연산면을 차단하면 지시 자체가 사라져 필터 사다리의 국소 암기에 기대게 된다. 깊이를 배제당한 표준 1층은 본 것만 외우고 빈칸부터 우연으로 내려간다.

6.3 군 구조 검사와 도구의 한계

학습이 끝난 회전 게이트의 연산면에서 각도를 직접 읽어 원형 통계를 냈다. 수 토큰들 사이의 각도차는 평균 0도 부근에 집중도 0.98에서 0.99로 몰려 있는데, 이는 수 토큰의 연산면이 학습 신호를 받지 않는 자리라 항등(0)에 머물렀다는 뜻으로, 항등 출발 규약의 측정 증거다. 상태 토큰들 사이의 각도차는 집중도 0.54에서 0.79로 낮고 평균도 120도 구조를 보이지 않았다. 다만 이 검사는 채널 32쌍 전체의 원형 평균이라, 상태 기계를 나르는 소수 채널의 구조가 나머지 잡음에 희석될 수 있다. 중요 채널만 가중해 다시 여는 것이 다음 과제이며, 6.2의 정확도와 수렴은 이 검사와 독립으로 성립한다.

6.4 프로토콜 3종의 비교

같은 과제 계열을 프로토콜 3종으로 돌린 결과가 구조 명제 하나를 준다. 한 방 프로토콜(중간 상태 없이 끝 답만 요구)에서는 5군 전부 학습 암기는 되지만 길이 밖 일반화가 전혀 안 된다. 블록 안에서 시간혼합은 블록 입력만 읽으므로 게이트 처리 결과가 같은 블록의 다음 자리로 이어지지 않고, 따라서 연쇄는 블록 깊이 또는 자기회귀 루프의 뒤편이기 때문이다. 상태를 쓰면서 가는 루프 프로토콜에서는 스텝당 과제가 국소 규칙으로 줄어 게이트 차이가 다시 드러난다. 명제로 줄이면 다음과 같다. 연쇄의 횟수는 깊이와 루프가 정하고, 게이트는 한 번의 연쇄에 담기는 연산의 질을 정한다. 본고의 판별은 그 질을 측정한 것이다.

7. 깊이 배제 판별: 삼각형 과제

7.1 과제와 분할 2종

과제는 꼭짓점에 표시가 있는 정삼각형이다. 이동 3종, 곧 R (120도 회전), R^2 (240도 회전), F (뒤집기)를 하나씩 읽으며, 그 시점의 삼각형 상태(P_0 부터 P_5)를 자리마다 말한다. 상태는 회전 3종과 뒤집힘 2종의 조합인 6종가 전부이고, P_0 이 시작 상태다. 이 상태 6종과 이동 3종이 이루는 대칭 체계는 가장 작은 비가환 군이다. 뒤집은 뒤 돌리면 회전이 반대로 도는 것으로 나타나, F 뒤에 R 를 적용한 끝 상태는 R^2 뒤에 F 를 적용한 것과 같고(P_2), R 뒤에 F 는 다른 상태(P_5)에 이른다. 규칙 표는 상태 6종과 이동 3종의 쌍마다 다음 상태를 정한 18항목이다. 창 구성, 학습량(길이 2 조합 9개 전부와 길이 3 조합 27개 중 14개), 빈칸 13개, 안 본 길이 4(81개), 5(243개), 6(729개) 전량, 강제와 자기 되먹임 채점 2종까지 전부 6절과 같고, 우연은 상태 6종 중 하나인 16.7%다.

보기. 길이 2 문제 FR 의 창은 pad 12칸 뒤에 $F P_1 R P_2$ 이다. F 를 읽으면 뒤집힌 상태 P_1 , 이어서 R 를 읽으면 뒤집힌 채 돈 상태 P_2 다. 순서를 바꾼 문제 RF 의 창은 $R P_3 F P_5$ 로 끝 상태가 다르다. mod 3 과제에서는 순서를 바꿔도 끝 상태가 같았으므로, 이 차이가 과제 2종을 가르는 전부다.

분할은 2종을 돌린다. 같은 실험을 분할만 바꿔 두 번 돌리는 이유는, 분할이 무엇을 노출하는가에 따라 시험되는 능력 자체가 달라짐이 측정으로 드러났기 때문이다.

- 유추시험 : 6절과 같은 고정 시드 무작위 분할이다. 사후 검사에서 이 분할은 규칙 표 18항목 중 16항목만 학습에 노출한다. 빈칸 13개 중 노출된 규칙만으로 풀리는 것은 9개(69%)이고, 나머지 4개는 학습에 한 번도 나오지 않은 규칙 2항목을 스스로 유추해야 풀린다. 따라서 이 분할은 배운 규칙의 합성이 아니라 배우지 않은 규칙의 유추까지 함께 시험한다.
- 합성시험 : 규칙 표 18항목이 전부 노출되도록 탐색으로 고른 커버리지 보장 분할이다. 빈칸 13개 전부가 배운 규칙의 합성만으로 풀린다. 게이트의 표현능력을 가리는 판별은 이쪽이다.

순서를 무시하는 풀이가 어디까지 가는지 산수로 정해 둔다. 이동의 다중집합(무엇을 몇 번 읽었는가)만 보는 풀이는 다중집합마다 답 하나만 낼 수 있으므로, 모든 순서가 같은 끝 상태를 내는 빈칸만 확실히 맞는다. 이 가환 천장은 유추시험 분할에서 빈칸 3개(23%), 합성시험 분할에서 5개(38%)다. 이보다 높은 점수는 순서 정보를 실제로 사용했다는 증거다.

실험군은 6절의 5종에 Q(쿼터니언 게이트)를 더한 6종이다. Q도 A, B, D, E와 같은 반야 1블록 엔진에서 게이트만 바꾼 절제 대조이고, 채널 64는 쿼터니언 묶음 16개로 나뉜다. 시드는 6개(0부터 5)로 늘려 시드 간 흔들림까지 측정하고, 나머지 조건(12,000스텝, 배치 32)은 전부 6절과 같다.

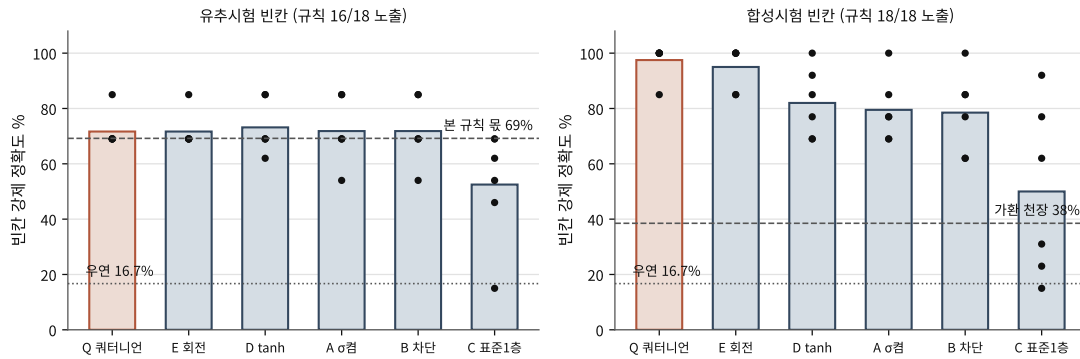
7.2 결과

측정

빈칸은 강제 채점 기준의 측정이다(시드 6개 각각, 괄호는 평균). 규칙 표를 배웠는가를 묻는 칸이라 스텝당 규칙을 분리하는 강제가 기준이고, 엔진 5군은 빈칸에서 자기 되먹임 점수가 강제와 동일했으며, 별도 측인 긴 문제의 자기 되먹임은 아래 항목에 따로 적는다.

- 유추시험 빈칸(규칙 16/18 노출) : E 회전 69, 69, 69, 85, 69, 69(71.7) · Q 쿼터니언 69, 69, 69, 85, 69, 69(71.7) · A 시그모이드 54, 69, 85, 85, 69, 69(71.8) · B 차단은 A와 시드 6개 전부 동일(71.8) · D tanh 62, 69, 85, 85, 69, 69(73.2) · C 표준 1층 69, 54, 46, 15, 62, 69(52.5). 기하 게이트 2종은 시드별로 서로 동일하고, 본 규칙 몫 69 아래로 내려가는 시드가 없다. A, B, D는 몫 아래(54, 62)로 내려가는 시드가 있다. 몫을 넘는 85는 시드 2와 3에서 여러 군에 함께 나타나고 나머지 시드에서는 사라져, 그 시드의 학습 순서가 배우지 않은 규칙 2항목과 우연히 맞아떨어진 것 이상의 증거가 없다. A와 B가 시드별로 동일한 것까지 합치면, 이 분할에서 갈림을 만드는 것은 게이트가 아니다.
- 합성시험 빈칸(규칙 18/18 노출) : Q 쿼터니언 85, 100, 100, 100, 100, 100(97.5) · E 회전 85, 85, 100, 100, 100, 100(95.0) · D tanh 69, 92, 69, 100, 85, 77(82.0) · A 시그모이드 69, 85, 69, 100, 77, 77(79.5) · B 차단 62, 85, 62, 100, 85, 77(78.5) · C 표준 1층 77, 62, 23, 15, 31, 92(50.0). 우연은 16.7%다. 순위가 사다리 그대로다.
- 수렴(교차엔트로피 0.01 도달 스텝) : Q 289, 280, 274, 275, 299, 309(평균 288) · E 332, 346, 259, 307, 395, 366(334) · 나머지 엔진 3군 평균 396에서 413. 옳은 기본 연산을 가진 쪽이 가장 덜 헤매고 시드 간 흔들림도 가장 작다.
- 안 본 길이 4, 5, 6 강제 : Q는 시드 6개와 길이 3종 내내 94에서 100%로 균일하다. E는 73에서 99%로 시드에 따라 요동하고, 나머지 군은 요동이 더 크다. 규칙 표를 안정되게 배운 군만 긴 문제로 고르게 이어 쓴다.
- 자기 되먹임 장길이 : 길이 6 자기에서 Q 91, 43, 54, 25, 98, 87(66.3), E 11, 21, 30, 41, 54, 61(36.3)이다. 상태가 6종이라 한 스텝의 오답이 mod 3보다 빠르게 눈덩이가 되는 누적 오차 축으로, 규칙 습득과 별개이나 여기서도 Q의 하락이 가장 완만하다.

그림 7-1. 삼각형 판별 결과



왼쪽은 유추시험 빈칸으로, 6군 전부 평균이 본 규칙 몫 69% 부근이고 몫을 넘는 점수는 시드 전반에서 유지되지 않는다. 오른쪽은 합성시험 빈칸으로, 순위가 쿼터니언, 회전, tanh, 시그모이드, 차단, 표준 1층 순서다. 막대는 시드 6개 평균이고 점 하나가 시드 하나의 값이다.

7.3 천장 부검

유추시험의 천장은 게이트의 결함이 아니다. 노출되지 않은 규칙 2항목은 창 어디에도 없었으므로, 그 항목이 필요한 빈칸 4개는 학습 신호가 닿지 않는 곳이다. 회전과 쿼터니언 게이트가 어느 시드에서도 본 규칙 몫 아래로 내려가지 않으면서 몫 위의 점수를 시드 전반에서 유지하지도 못한 것은, 게이트의 표현능력이 배운 규칙을 합성하는 능력이지 배우지 않은 규칙을 만들어 내는 능력이 아님을 갈라 보여 준다. 표현능력과 유추는 다른 능력이고, 판별 설계는 이 둘을 섞지 않아야 한다. 합성시험이 그 교정이다.

합성시험의 갈림은 규칙 표 채점으로 부검한다. 학습이 끝난 모델에 길이 3 문제 27개 전부를 정답 상태를 보여주며 통과시키고, 상태 자리마다 그 자리가 사용한 규칙 표 항목별로 채점한다. 부검 결과는 2겹이다. 첫째, 기하 게이트 2종의 남는 실패는 전부 시작 상태 P_0 의 항목이다(E는 시드 2개에서 항목 1개나 2개, Q는 시드 1개에서 항목 1개를 틀리고, 나머지 시드는 18항목 전부 정답이다). P_0 항목의 학습 노출은 대부분 창의 첫 이동 자리에 몰려 있고, 문제 중간에 상태가 P_0 로 되돌아온 자리는 학습에 드물므로, 이 실패는 비가환성 자체가 아니라 같은 규칙을 다른 자리에서 다시 쓰는 자리 일반화와 얽혀 있다. 실패 항목의 확정 부검은 다음 과제로 남긴다. 둘째, 모든 엔진 군의 빈칸 점수가 가환 천장 38% 보다 크게 높은 것은 루프 프로토콜이 순서를 창의 중간 상태로 외부화해 스텝당 과제를 상태와 이동의 조화로 줄여 주기 때문이다. 순서 처리는 루프가 감당하고, 갈림은 비가환 규칙 표를 얼마나 빠르고 안정되게 습득하는가에서 발생한다.

7.4 기본 연산 사다리

판별 2종을 겹치면 명제 하나가 남는다. mod 3 과제의 스텝당 연산은 가환인 순환이고, 그 연산을 기본 연산으로 가진 회전 게이트가 6절에서 시드 3개 만점에 최속 수렴이었다. 삼각형 과제의 스텝당 연산은 비가환 합성이고, 그 연산을 곱셈 규칙으로 가진 쿼터니언 게이트가 빈칸 평균, 수렴 속도, 안 본 길이의 균일성, 자기 되먹임의 완만한 하락까지 전 항목에서 첫째다. 각도 덧셈으로 닫히는 회전 게이트도 루프의 힘을 빌려 시드에 따라 표 전부를 배우지만, 시드 간 요동이 크고 실패 시드가 남는다. 밸브는 통과와 차단, 부호 스칼라는 위수 2, 평면 회전은 임의 위수의 가환 순환, 쿼터니언은 비가환 합성까지. 게이트의 기본 연산은 사다리를 이루고, 과제의 대수와 게이트의 단이 맞을 때 학습이 가장

빠르고 안정되며, 판별은 그 적합을 측정으로 확인하는 도구다.

8. 한계와 다음 측정 과제

기준선은 1인 개발, 자작 정확한 전치 역전파 엔진, 소비자 그래픽 처리장치 한 대라는 레퍼런스 클래스이다. 아래는 결함이 아니라 다음 측정 과제이다.

- 소형 합성 과제 : 본고의 측정은 채널 64의 1블록과 mod 3, 삼각형 합성 과제다. 자연어에서의 이득은 아직 측정하지 않았다. 발행 모델 크기(채널 1024, 블록 16)로 회전 게이트와 쿼터니언 게이트를 학습해 제3편의 측정 전체를 반복하는 것이 다음 과제다.
- 시드와 통계 : mod 3 판별은 군당 시드 3개, 삼각형 판별은 6개다. 삼각형 합성시험의 빈칸은 시드 간 요동이 커서 시드를 6개로 늘렸고 평균의 순위는 사다리와 일치하나, 반복 수를 더 늘려 분산을 확정하는 것이 다음 과제다.
- 군 구조의 직접 관측 : 6.3의 원형 평균은 중요 채널을 가중하지 않아 상태 토큰의 120도 구조를 판정하지 못했다. 채널 기여도로 가중한 재검이 다음 과제다.
- 실패 항목의 정체 : 7.3의 규칙 표 채점은 회전 게이트의 실패가 특정 항목에 국소화됨을 보였으나, 왜 그 항목인지는 판정하지 못했다. 실패 항목의 대수적 공통점을 추적하는 것이 다음 과제다.
- 자기 되먹임 누적 오차 : 삼각형 과제의 긴 문제에서 강제 점수와 자기 점수의 격차가 커진다. 규칙 습득과 별개인 누적 오차 축이며, 오답이 창에 적힌 뒤의 복원 기제는 본고가 다루지 않은 별개 능력이다.
- 복소 지수 게이트 : 밑이 e 라 크기와 회전은 한 지수에서 동거한다($e^{a+i\theta} = e^a e^{i\theta}$). 본고는 폭주가 없는 순수 회전($a = 0$)만 다뤘고, 크기 인자를 좁게 묶어 함께 학습하는 확장이 다음 과제다.
- 시간 지연 회전 : 회전을 채널 쌍이 아니라 시간혼합의 주파수 계수에 걸면 이동 정리에 의해 시간 지연이 된다. 연산자가 어느 과거를 볼지를 지시하는 별개 능력이라 별도 실험으로 남긴다.

9. 결론

본고는 분수 미분의 인수분해에서 회전 연산자 게이트를 유도하고, 그 수반이 저장 없는 닫힌형임을 보여 유한차분으로 검증했으며, 발행 엔진을 한 줄도 바꾸지 않는 주입으로 새 기본 연산을 붙이는 방식과 그 무해성 증명을 제시했다. 깊이를 배제한 mod 3 판별에서 게이트만 바꾼 절제 대조는 표현능력 순위를 회전, tanh, 시그모이드, 차단, 표준 1층 순서로 드러냈다. 빈칸을 시드 3개 전부 채운 것은 회전과 tanh 뿐이고, 안 본 길이와 수렴 속도에서는 회전이 가장 높고 가장 빨랐다. 위수 논증이 이 순위의 대수적 이유다. 부정은 위수 2라 부호 있는 스칼라도 흉내 내지만, 위수 3부터는 회전만이 기본 연산으로 가지며, mod n 이 이산 회전군과 동형이므로 순환 논리의 자연 좌표계는 각도다.

이어서 같은 물음을 한 단 올렸다. 연산면 4성분을 단위 쿼터니언으로 읽는 쿼터니언 게이트를 정의하고 그 수반도 켄레 좌곱과 복원 항으로 닫히는 무저장 닫힌형임을 검증했으며, 가장 작은 비가환 군인 삼각형 과제에서 규칙 표의 노출을 통제된 분할 2종으로 판별했다. 규칙 전체를 노출한 합성시험에서 쿼터니언 게이트는 빈칸 평균, 수렴 속도, 안 본 길이의 균일성, 자기 되먹임의 완만한 하락까지 전 항목에서 첫째였고, 기하 게이트 2종에 남는 실패는 전부 시작 상태 규칙에 국소화되었다. 규칙 일부를 숨긴 유추시험에서는 본 규칙 뒀을 넘는 점수가 시드 전반에서 유지되지 않고 기하 게이트 2종은 뒀 아래로

내려가지도 않아, 표현능력과 유추가 서로 다른 능력임이 갈라져 측정되었다. 가환 과제는 회전이면 충분하고, 비가환 과제에서는 곱친 면의 회전이 가장 빠르고 안정된 그릇이다. 과제의 대수가 게이트의 기본 연산을 정한다. 연산면을 회전각으로 읽는 것은 제3편의 게이트가 남긴 표현 한계 2종(부호 부재, 대각 작용)를 하나의 처방으로 푸는 길이고, 쿼터니언은 기본 연산 사다리의 다음 단이며, 그 값은 이 소형 판별들에서 측정으로 확립되었다.

10. 후속 논문 예고

후속 논문 예고

- 제8편(예정) — 클리퍼드 사다리 : 평면 회전은 클리퍼드 대수(Clifford algebra, 방향들의 기하 곱으로 만드는 대수) $Cl(2)$ 의, 쿼터니언은 $Cl(3)$ 의 짝수 부분에 해당한다. 다음 편은 $Cl(4)$ 부터 $Cl(7)$ 까지 단마다 판별 과제를 설계해 이 사다리를 측정으로 확인한다. 수학이 미리 내놓는 예측 하나를 채점 기준으로 명시해 둔다. $Cl(4)$ 의 짝수 부분은 쿼터니언 2개의 병렬로 분해되므로, $Cl(4)$ 게이트는 쿼터니언 게이트 2벌 대비 새 기본 연산을 갖지 못해야 한다(이득 0). 같은 자리를 선행 공리 문헌 [1]도 $Cl(4)$ 연산자가 존재하지 않는다고 미리 말해 두었다. 수학의 분해 정리와 공리의 예언이 같은 구멍을 가리키고 있으므로, 이 구멍이 측정에서 확인되는지가 다음 편의 첫 채점이다. 배경 공리 문헌의 클리퍼드 형식화는 인용으로만 쓰며, 주장은 측정에서 나온다.
- 마지막 편(미완) — 유사도 정리와 추론 순회의 결합 : 데이터면 유사도 정리(제2편)와 연산면 추론 순회를 엮는 자기 발화. 회전의 합성이 각도 덧셈이라는 본고의 성질은 그 순회의 산술 후보다. 최종 조립이 끝나지 않아 아직 다루지 않는다.

참고문헌

- [1] 한혁진 (2026). Banya Framework: An Axiom-Based Science Mining Engine for Deriving Fundamental Physical Constants (반야프레임 공리 15개). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.20301304>. (본 시리즈의 배경 자연관, 선행 공리 문헌)
- [2] 한혁진 (2026). 자동미분 없이 수동으로 유도한 정확한 전치로 학습하는 언어모델 엔진. 반야 연구 시리즈 제1편. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21385447>
- [3] 한혁진 (2026). 바이토큰: 직교 데이터-연산 토큰과 라벨 없이 창발하는 연산자. 반야 연구 시리즈 제3편. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21385676>
- [4] Vaswani, A. et al. (2017). Attention Is All You Need. NeurIPS. arXiv:1706.03762.

부록 A. 실험 설정

표 A-1. 깊이 배제 판별 설정

항목	값	항목	값
채널 폭 H	64	문맥 길이 T	16
블록 수 N	1	블록당 채널 변환 겹수	2
혼합 헤드 수	4	어휘	8 (pad, 수 3종, 상태 3종)
학습 스텝	12,000	배치	32
SGD 학습률	0.2	Adam 학습률	0.002
시드	0, 1, 2	표준 1층(C)	같은 폭, AdamW 0.001

A, B, D, E 는 위 설정의 같은 엔진에서 게이트만 다르다. C 는 같은 폭과 같은 데이터 흐름의 표준 트랜스포머 1 층이다.

표 A-2. 삼각형 판별 설정 (표 A-1과 다른 항목만)

항목	값	항목	값
어휘	10 (pad, 이동 3종, 상태 6종)	실험군	A, B, D, E, Q, C
분할	유추시험(무작위), 합성시험(커버리지 보장)	우연	16.7%
쿼터니언 묶음	채널 64를 4씩 16묶음	규칙 표	상태 6 × 이동 3 = 18항목
시드	0부터 5 (6개)		

적지 않은 항목(채널 폭, 블록 수, 스텝, 배치, 학습률)은 표 A-1과 같다.

부록 B. 측정 환경

표 B-1. 측정에 사용한 컴퓨터 사양

구분	사양
그래픽 처리장치(GPU)	NVIDIA GeForce RTX 3090 Ti (24 GB)
운영체제	Ubuntu 24.04.4 LTS
소프트웨어	Python 3.12.3, numpy 2.5.1, cupy 14.1.1, CUDA 13.3.1, (선택) torch 2.13.0
측정 대상	소형 1블록 절제 학습 87회(엔진 72회, 표준 1층 15회)와 수반, 설계 검사

수치는 시드 고정이나 GPU 합산 순서에 따라 마지막 자리가 흔들릴 수 있다.

부록 C. 재현 안내

이 논문의 재현은 모델 체크포인트도 말뭉치도 필요 없다. 과제 데이터가 프로브 안에서 생성되기 때문이다.

1단계, 요구 환경. NVIDIA GPU(CUDA)와 Python 3.12 에서 다음을 설치한다. 표준 1층 대조 (C)까지 재생하려면 torch 를 함께 설치하고, 없으면 프로브가 그 군만 건너뛰며 고지한다.

```
pip install -r requirements.txt
```

2단계, 코드 내려받기. 저장소 압축본을 받아 푼다.

```
wget https://ubmscoin.github.io/banya/banya_ai_paper_code/banya_ai_paper_code.zip
```

```
unzip banya_ai_paper_code.zip
```

3단계, 프로브 실행.

```
cd banya_ai_paper_code/probe && python3 paper7_rotation_probe.py
```

표 C-1. 프로브와 본문 수치의 대응

프로브	재생하는 수치	확인할 출력
paper7_rotation_probe.py	5절 수반 정합(회전, 쿼터니언)과 설계 증명, 6절과 7절 판별 전체	내적 항등 차이 0, 기울기 비율 중앙값 1.000000, 궤적 일치, mod 3 빈칸 E 100% 시드 3개, 삼각형 합성시험 빈칸 Q 평균 97.5%와 수렴 평균 288스텝

회전 게이트와 쿼터니언 게이트의 기본 연산 자체는 paper7_rotation.py 에 있으며, 발행 엔진 파일을 바꾸지 않고 실행 중 주입으로 붙는다. 패키지의 폴더 구성과 파일별 설명은 [목차 페이지](#)에 있다.

반야 연구 시리즈 제7편(회전 연산자 게이트). 모든 수치는 부록 B 환경에서 측정한 값이다. 배경 자연관은 선행 공리 문헌 [1]로 인용하되 이 글 주장의 근거가 아니다. 제1편(엔진)과 제3편(바이토큰)을 인용하며, 본편은 제3편 6절의 게이트 표현 한계에서 파생되었다.